Tytuł pracy badawczej

Wyznaczanie momentu bezwładności pajacyka

Autorzy: Sebastian Boroń, Adrianna Suszyło

Opiekun: Władysław Kulpa

Szkoła: Zespół Szkół w Sieniawie

Adres pocztowy:
ul. Rynek 4
37-530 Sieniawa
tel. 016 622 70 48
E-mail:
losieniawa@wp.p

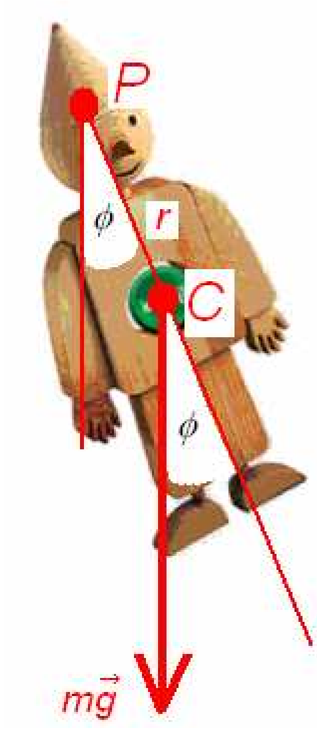
Streszczenie (przedmiot prezentacji i uzyskane rezultaty)

Słowa kluczowe:
Moment bezwładności, moment skręcający,
okres wahań, środek ciężkości, wahadło fizyczne,
równanie ruchu obrotowego

Przedmiotem naszej prezentacji jest **metoda wyznaczania momentu bezwładności ciała o dowolnym kształcie (pajacyka)** poprzez pomiar okresu drgań wahadła fizycznego. Poprawność metody zweryfikowaliśmy wyznaczając pośrednio **przyspieszenie ziemskie**. W tym celu zbadaliśmy zależność okresu wahań 6-ciu płaskich krążków od ich promienia (**metoda 1**). Pomiary przeprowadziliśmy dla małych wychyleń. Zależność okresu od promienia doprowadziliśmy do zależności liniowej. Metodą regresji liniowej wyznaczyliśmy współczynniki kierunkowe prostej najlepszego dopasowania oraz ich niepewności pomiarowe. Poprzez pomiar masy i promienia krążka wyznaczyliśmy po raz drugi jego moment bezwładności (**metoda 2**). Dla 6-ciu krążków obie metody dały porównywalny (w granicach dokładności pomiarów) wynik.

Teoria

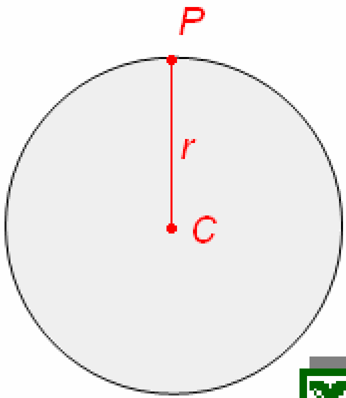
Pajacyk o nieregularnym kształcie może się obracać dokoła poziomej osi przechodzącej przez punkt P, bez tarcia (założenie).
Położeniem równowagi jest takie położenie, w którym środek masy C leży na linii pionowej przechodzącej przez punkt P.
Pajacyk odchylamy o kąt ϕ od położenia równowagi.
Przywracający równowagę moment siły wynosi
$M = - r\, mg \sin \phi$.
Dla małych wychyleń $\sin \phi \approx \phi$.



Teoria cd.

Równanie ruchu pajacyka przyjmuje postać:
Moment siły M = moment bezwładności I_P względem punktu P * przyspieszenie kątowe ε

$M = I_P\, \varepsilon$
$-r\, m\, g\, \phi = I_P\, \varepsilon$



Rozwiązaniem tego równania jest funkcja $\phi = \phi_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$,

gdzie $\omega^2 = \dfrac{rmg}{I_P}$.

Stąd $\omega = \sqrt{\dfrac{rmg}{I_P}}$,

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_P}{rmg}}} \quad (1)$$

Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt P:

$$\boxed{I_P = \frac{T^2 rmg}{4\pi^2}} \quad (2)$$

Cel eksperymentu i metoda pomiarowa

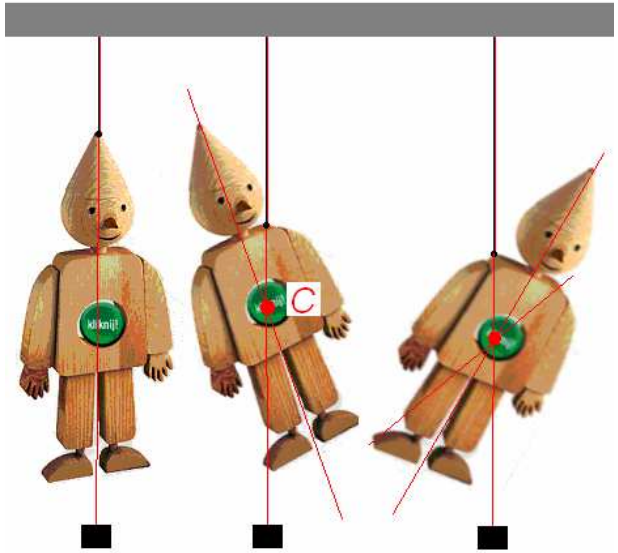
Cel eksperymentu

Celem eksperymentu jest wyznaczenie momentu bezwładności *I*p dowolnej bryły sztywnej (pajacyka) poprzez pomiar okresu wahadła fizycznego *T*.

Metoda pomiarowa

Ze wzoru (2) wynika, że należy:

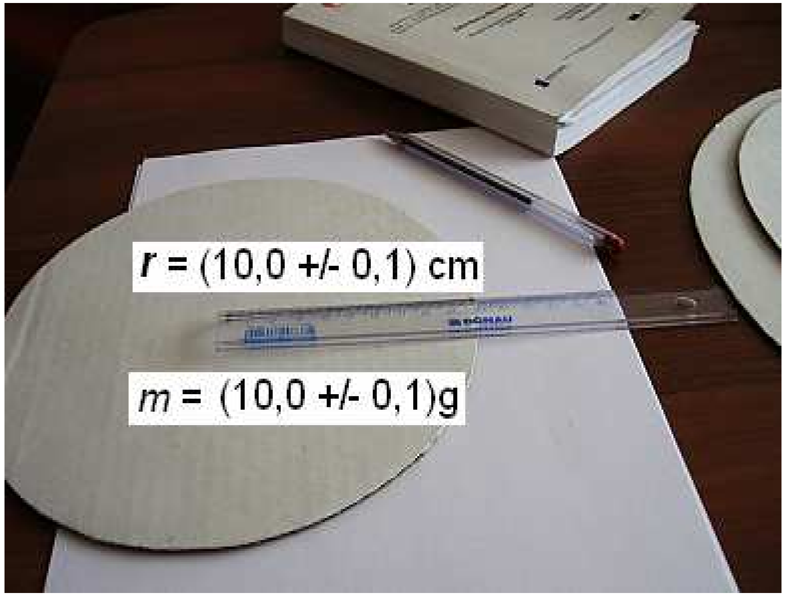
- wyznaczyć środek ciężkości *C*,
- zmierzyć linijką długość odcinka $r = PC$,
- zważyć bryłę na wadze elektronicznej (masa *m*).



Rysunek 2. Zawieszając na dwa różne sposoby pajacyka wyznaczamy jego środek masy *C*.

Pomoce i przyrządy pomiarowe

Pomoce i przyrządy pomiarowe:
linijka, waga elektroniczna, stoper
komputer z arkuszem kalkulacyjnym lub kalkulator
pajacyk i 6 krążków o różnych promieniach



Ćwiczenie 1. Weryfikacja poprawności metody

Wyznaczenie momentu bezwładności krążka względem punktu P, znajdującego się na jego obwodzie.

Metoda 1. Mierzymy okres 10 drgań krążka, jego masę i promień.
Metoda 2. Pomiar masy krążka *m* i promienia *r*.
Zastosowanie twierdzenia Steinera

r	m	T	I_{1P}	I_{2P}
m	kg	s	kg m^2	kg m^2
0,1	0,01	0,783	0,000152	0,000150

$$I_{P1} = \frac{T^2 rmg}{4\pi^2}$$

$$I_{P2} = \frac{3}{2} mr^2$$

Dyskusja błędów pomiarowych

$\Delta r = 0{,}001$ $\Delta m = 0{,}001$ $\Delta T = 0{,}01$

$\Delta I_{1P} = I_{1P} \cdot \left(2\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta m}{m} \right) = 0{,}000021$ (Metoda 1 – 3 kolumna tabeli)

$\Delta I_{2P} = I_{2P} \cdot \left(\frac{\Delta m}{m} + 2 \cdot \frac{\Delta r}{r} \right) = 0{,}000018$ (Metoda 2 – 4 kolumna tabeli)

Ćwiczenie 2. Moment bezwładności pajacyka

Wyznaczenie momentu bezwładności pajacyka względem punktu P.

Mierzymy okres 10 drgań:

r	m	T	$I_P = \dfrac{T^2 rmg}{4\pi^2}$
m	kg	s	kg m^2
0,011	0,0093	0,655	0,000109

Moment bezwładności pajacyka

Dyskusja błędów pomiarowych

$\Delta r = 0{,}001$ $\Delta m = 0{,}0001$ $\Delta T = 0{,}01$

$$\Delta I_{1P} = I_{1P} \cdot \left(2\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta m}{m} \right) = 0{,}000016$$

Liniowa zależność T^2 od r dla krążka

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$$

$$T^2 = \frac{6\pi^2}{g} r$$

$$y = a \cdot x$$

$$\boxed{y \to T^2 \qquad a = \frac{6\pi^2}{g} \qquad x \to r}$$

$$\boxed{g = \frac{6\pi^2}{a}}$$

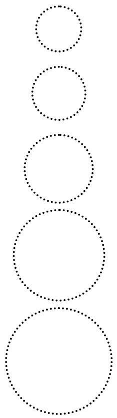
$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta a}{a}$$

$$\Delta g = g \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

Przewidywania:
Wykresem zależności $\boldsymbol{T^2}$ od ***r*** *będzie*
półprosta, wychodząca z początku układu współrzędnych.
Z wykresu wyznaczymy współczynnik ***a***.
Mając ***a*** obliczymy przyspieszenie ziemskie ***g***.

Wyniki wyników pomiarów

dr	dT
0,001	**0,01**



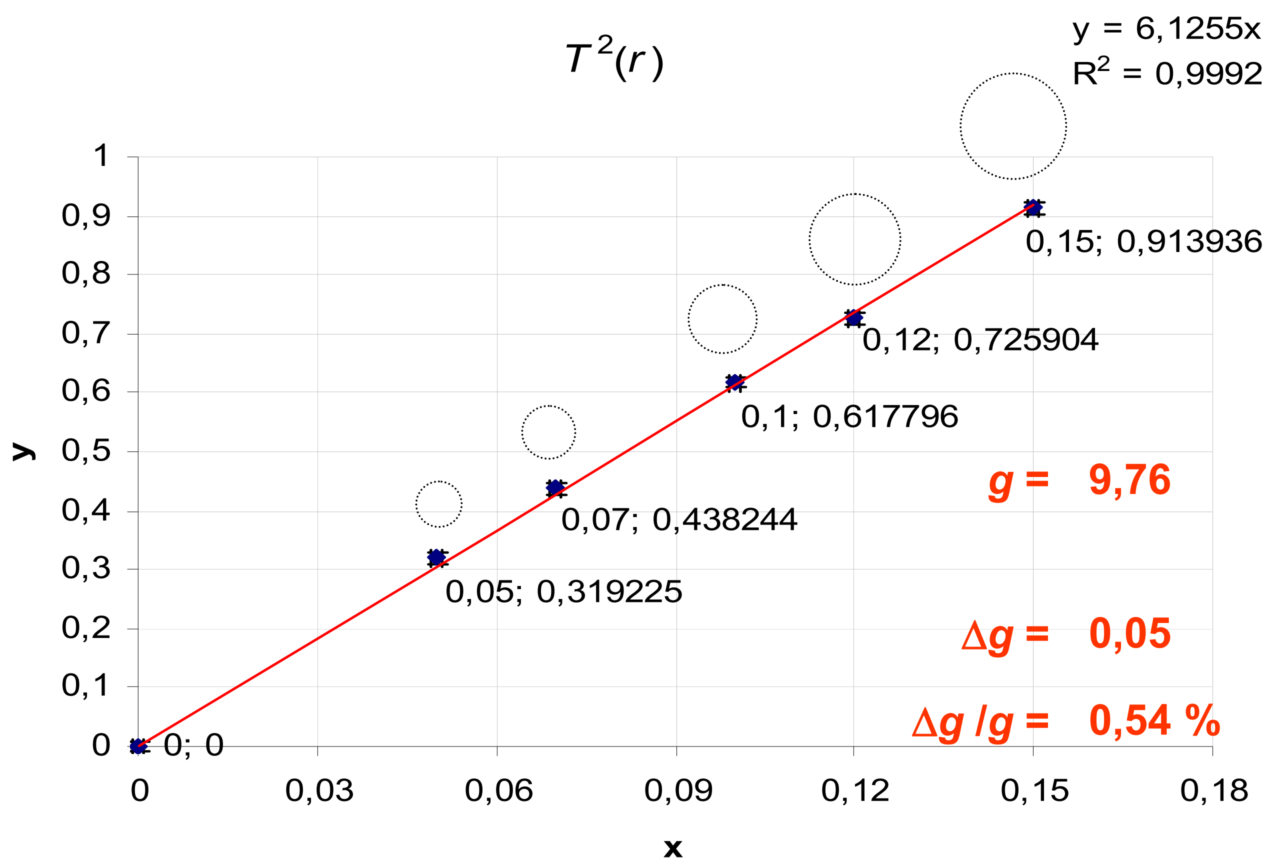
xi			**yi**
***r*, m**	**t_{10}, s**	***T*, s**	**T^2, s^2**
0	0	0	0
0,05	5,49	0,549	0,301401
0,07	6,53	0,653	0,426409
0,10	7,83	0,783	0,613089
0,12	8,51	0,851	0,724201
0,15	9,54	0,954	0,910116

Tabela 1. Zależność kwadratu okresu wahań od promienia krążka

Tabela 2. Współczynniki kierunkowe prostej najlepszego dopasowania

asr	**bsr**
6,047834	**0,008611**
6,05	**0,01**
sa	**sb**
0,069429	**0,006605**
0,07	**0,01**

Wykres zależności $T^{2}(r)$



Dyskusja uzyskanych wyników

Wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego
Okres wahań krążka o promieniu 10 cm wykonującego małe drgania względem punktu na obwodzie wynosi 0,783 s. Wartość przyspieszenia ziemskiego obliczymy ze wzoru:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}} \quad \rightarrow \quad \boxed{g = \frac{6\pi^2 r}{T^2}}$$

Dla T = 0,783 s i r = 10 cm przyspieszenie g wynosi 9,66 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Błąd procentowy pomiaru przyspieszenia ziemskiego wynosi około 1 %.

Błędy pomiarowe

Dyskusja błędów (metoda logarytmiczna)

$$\log g = \log 6\pi^2 - \log A$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta A}{A}$$

$$\Delta g = g\frac{\Delta A}{A}$$

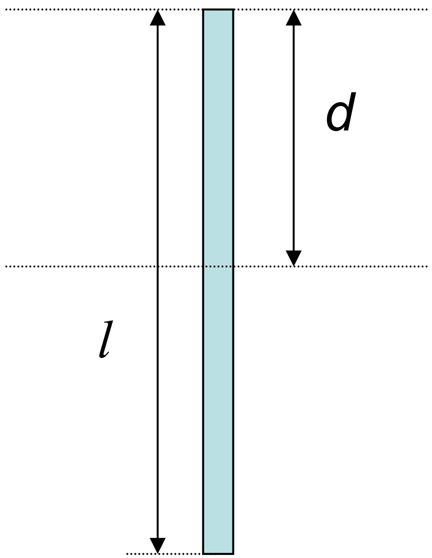
$$\boxed{\begin{aligned} g &= 9{,}76 \\ \Delta g &= 0{,}05 \\ \Delta g / g &= 0{,}54\ \% \end{aligned}}$$

Uzyskane rezultaty są porównywalne z przewidywaniami i danymi dostępnymi w literaturze.

Doświadczenie z prętem

Stoper

Doświadczenie z prętem – obliczenie ***g***



$$I_P = \frac{1}{3} m l^2$$

$$I_0 = \frac{1}{12} m l^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_P}{mdg}}$$

$$I_p = \frac{1}{3} m l^2$$

$$d = \frac{l}{2}$$

$$\boxed{g = \frac{8}{3}\pi^2 \frac{l}{T^2}}$$

Bibliografia

[1] D. Halliday, R. Resnick, *Fizyka dla studentów nauk przyrodniczych i technicznych*, Tom 1, Wydanie V, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, W-wa 1975, str. 436-439, str. 397